МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Московский Авиационный Институт»

(Национальный Исследовательский Университет)

Институт: №8 «Информационные технологии и прикладная математика»

Кафедра: 806 «Вычислительная математика и программирование»

Курсовая работа

по курсу «Вычислительные системы»

I семестр

Задание 3

«Вещественный тип. Приближенные вычисления. Табулирование функций»

|  |  |
| --- | --- |
| Группа: | М8О-107Б-19 |
| Студент: | Инютин Максим Андреевич |
| Преподаватель: | Сластушенский Юрий Викторович |
| Оценка: |  |
| Дата: |  |

**Постановка задачи**

Составить программу на Си, которая печатает таблицу значений элементарной функции, вычисленной двумя способами: по формуле Тейлора и с помощью встроенных функций языка программирования. В качестве аргументов таблицы взять точки разбиения отрезка [a, b] на n равных частей (n+1 точка включая концы отрезка), находящихся в рекомендованной области хорошей точности формулы Тейлора. Вычисления по формуле Тейлора проводить по экономной в сложностном смысле схеме с точностью ε \* 10k, где ε - машинное эпсилон аппаратно реализованного вещественного типа для данной ЭВМ, а k – экспериментально подбираемый коэффициент, обеспечивающий приемлемую сходимость. Число итераций должно ограничиваться сверху числом порядка 100. Программа должна сама определять машинное ε и обеспечивать корректные размеры генерируемой таблицы.

Вариант 13:

Ряд Тейлора —

Значения a и b – 0.0, 1.0

Функция — sin(x)

**Теоретическая часть**

**Формула Тейлора** — формула разложения функции в бесконечную сумму степенных функций. Формула широко используется в приближённых вычислениях, так как позволяет приводить трансцендентных функций к более простым. Сама она является следствием теоремы Лагранжа о среднем значении дифференцируемой функции. В случае a=0 формула называется рядом Маклорена.

**Машинное эпсилон** — числовое значение, меньше которого невозможно задавать относительную точность для любого алгоритма, возвращающего вещественные числа. Абсолютное значение для машинного эпсилон зависит от разрядности сетки применяемой ЭВМ и от разрядности используемых при расчёте чисел. Формально это машинное эпсилон определяют как число, удовлетворяющее равенству 1 + ε = 1. Фактически, два отличных от нуля числа являются равными с точки зрения машинной арифметики, если их модуль разности меньше или не превосходит машинное эпсилон.

В языке Си машинные эпсилон определено для следующих типов: float – 1.19 \* 10-7, double – 2.20 \* 10-16, long double – 1.08 \* 10-19.

**Описание алгоритма**

Рассмотрим алгоритм решения. Сперва нужно найти машинное эпсилон, на котором будет основываться точность вычисления. Это можно сделать просто деля 1 на 2 за O(log(1016))~O(1) Для каждой N+1 строки нужно просуммировать i членов формулы Тейлора, пока |A1-A2|> ε. Проще всего задать рекуррентное соотношение между членами: где, Ti – значение i-того члена формулы Тейлора, n – счётчик факториала, x – значение для которого проводятся вычисления. В общем случае сумма может быть вычислена за O(log k). Асимптотика решения O(1 + (n+1) log k) ~ O(n log k)

**Использованные в программе переменные**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Название переменной | Тип переменной | Смысл переменной |
| n | int | То самое число N, на которое нужно разбить отрезок |
| k | int | То самое число K, используемое для вычисления точности. Так же обозначает, что вывод должен быть с точность до K знаков после запятой |
| e0 | double | То самое машинное эпсилон.  В случае с double ε =2.20 \* 10-16 |
| d | double | Формально разница между предыдущим значением из отрезка и следующим, если отрезок разбит на n равных частей. |
| acc | double | Точность вычислений. Именно с этой переменной мы будем сравнивать ответы A1 и A2 |
| x | double | Переменная, для которой будем производить вычисления |
| ans1 | double | То самое значение A1, вычисленное с помощью формулы Тейлора |
| ans2 | double | То самое значение A2, вычисленное с помощью встроенных функций языка |
| count | double | Счётчик члена формулы Тейлора. Так как для sin(x) все члены нечётные, то будем пропускать чётные |
| cur | double | То самое значение Ti. Текущие значение члена формулы Тейлора. При чём T0=x |
| step | int | Число итераций, которые затрачены  на вычисление A2 |

**Использованные в программе функции**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Название функции | Тип возвращаемой переменной | Смысл функции |
| do\_nothing | double | Копирует значение в память, где double выделяется 64 бита, а не 80 бит |

**Программа**

Команды компилятора: -std=c11

#include <math.h>

#include <stdio.h>

double do\_nothing(double x){

return x;

}

int main(){

int n, k;

scanf("%d %d", &n, &k);

double e0=1.0, d=1.0/(double)n;

while(do\_nothing(1.0+e0/2.0)>1.0){

e0=e0/2.0;

}

printf("Machine epsilon equals %.8e\n", e0);

printf("--------------------------------------\n");

double acc=e0\*pow(10, 16-k);

double x=0.0, ans1, ans2, count, cur;

int step;

for(int i=0; i<=n; i++){

ans1=0;

ans2=sin(x);

step=0;

count=1.0;

cur=x;

while(fabs(ans1-ans2)>acc){

ans1+=cur;

count+=2;

cur\*=(-1)\*x\*x/(count\*(count-1.0));

step++;

}

printf("%.2f | %.\*f | %.\*f | %d | %.\*f\n", x, k+1, ans1, k+1, ans2, step, k+1, fabs(ans2-ans1));

x+=d;

}

return 0;

}

**Входные данные**

Единственная строка содержит два целых числа N (0≤N≤100) – число разбиений отрезка на равные части, K (0≤K≤16) — коэффициент для вычисления точности формулы Тейлора.

**Выходные данные**

Программа должна вывести значение машинного эпсилон, а затем N+1 строку.

В каждой строке должно быть значение x, для которого вычисляется функция, число A1 — значение, вычисленное с помощью формулы Тейлора, A2 – значение, вычисленное с помощью встроенных функций языка, i – количество итерация, требуемых для вычисления, и Δ – разница значений A1 и A2 по модулю. A1, A2 и Δ должны быть выведены с точностью K знаков после запятой.

**Протокол исполнения и тесты**

Тест #1

Ввод:

2 8

Вывод:

Machine epsilon equals 2.22044605e-016

--------------------------------------

0.00 | 0.000000000 | 0.000000000 | 0 | 0.000000000

0.50 | 0.479425533 | 0.479425539 | 4 | 0.000000005

1.00 | 0.841470985 | 0.841470985 | 6 | 0.000000000

Тест #2

Ввод:

10 6

Вывод:

Machine epsilon equals 2.22044605e-016

--------------------------------------

0.00 | 0.0000000 | 0.0000000 | 0 | 0.0000000

0.10 | 0.0998333 | 0.0998334 | 2 | 0.0000001

0.20 | 0.1986693 | 0.1986693 | 3 | 0.0000000

0.30 | 0.2955203 | 0.2955202 | 3 | 0.0000000

0.40 | 0.3894187 | 0.3894183 | 3 | 0.0000003

0.50 | 0.4794271 | 0.4794255 | 3 | 0.0000015

0.60 | 0.5646424 | 0.5646425 | 4 | 0.0000000

0.70 | 0.6442176 | 0.6442177 | 4 | 0.0000001

0.80 | 0.7173557 | 0.7173561 | 4 | 0.0000004

0.90 | 0.7833258 | 0.7833269 | 4 | 0.0000011

1.00 | 0.8414710 | 0.8414710 | 5 | 0.0000000

Тест #3

Ввод:

20 8

Вывод:

Machine epsilon equals 2.22044605e-016

--------------------------------------

0.00 | 0.000000000 | 0.000000000 | 0 | 0.000000000

0.05 | 0.049979167 | 0.049979169 | 2 | 0.000000003

0.10 | 0.099833417 | 0.099833417 | 3 | 0.000000000

0.15 | 0.149438133 | 0.149438132 | 3 | 0.000000000

0.20 | 0.198669333 | 0.198669331 | 3 | 0.000000003

0.25 | 0.247403971 | 0.247403959 | 3 | 0.000000012

0.30 | 0.295520207 | 0.295520207 | 4 | 0.000000000

0.35 | 0.342897807 | 0.342897807 | 4 | 0.000000000

0.40 | 0.389418342 | 0.389418342 | 4 | 0.000000001

0.45 | 0.434965532 | 0.434965534 | 4 | 0.000000002

0.50 | 0.479425533 | 0.479425539 | 4 | 0.000000005

0.55 | 0.522687216 | 0.522687229 | 4 | 0.000000013

0.60 | 0.564642473 | 0.564642473 | 5 | 0.000000000

0.65 | 0.605186406 | 0.605186406 | 5 | 0.000000000

0.70 | 0.644217688 | 0.644217687 | 5 | 0.000000000

0.75 | 0.681638761 | 0.681638760 | 5 | 0.000000001

0.80 | 0.717356093 | 0.717356091 | 5 | 0.000000002

0.85 | 0.751280409 | 0.751280405 | 5 | 0.000000004

0.90 | 0.783326917 | 0.783326910 | 5 | 0.000000008

0.95 | 0.813415519 | 0.813415505 | 5 | 0.000000014

1.00 | 0.841470985 | 0.841470985 | 6 | 0.000000000

Тест #4

Ввод:

4 16

Вывод:

Machine epsilon equals 2.22044605e-016

--------------------------------------

0.00 | 0.00000000000000000 | 0.00000000000000000 | 0 | 0.00000000000000000

0.25 | 0.24740395925452294 | 0.24740395925452294 | 6 | 0.00000000000000000

0.50 | 0.47942553860420301 | 0.47942553860420301 | 7 | 0.00000000000000000

0.75 | 0.68163876002333412 | 0.68163876002333412 | 8 | 0.00000000000000000

1.00 | 0.84147098480789650 | 0.84147098480789650 | 9 | 0.00000000000000000

Тест #5

Ввод:

50 12

Вывод:

Machine epsilon equals 2.22044605e-016

--------------------------------------

0.00 | 0.0000000000000 | 0.0000000000000 | 0 | 0.0000000000000

0.02 | 0.0199986666933 | 0.0199986666933 | 3 | 0.0000000000000

0.04 | 0.0399893341867 | 0.0399893341866 | 3 | 0.0000000000000

0.06 | 0.0599640064800 | 0.0599640064794 | 3 | 0.0000000000006

0.08 | 0.0799146939692 | 0.0799146939692 | 4 | 0.0000000000000

0.10 | 0.0998334166468 | 0.0998334166468 | 4 | 0.0000000000000

0.12 | 0.1197122072889 | 0.1197122072889 | 4 | 0.0000000000000

0.14 | 0.1395431146442 | 0.1395431146442 | 4 | 0.0000000000001

0.16 | 0.1593182066141 | 0.1593182066142 | 4 | 0.0000000000002

0.18 | 0.1790295734253 | 0.1790295734258 | 4 | 0.0000000000005

0.20 | 0.1986693307937 | 0.1986693307951 | 4 | 0.0000000000014

0.22 | 0.2182296230809 | 0.2182296230809 | 5 | 0.0000000000000

0.24 | 0.2377026264271 | 0.2377026264271 | 5 | 0.0000000000000

0.26 | 0.2570805518922 | 0.2570805518922 | 5 | 0.0000000000000

0.28 | 0.2763556485641 | 0.2763556485641 | 5 | 0.0000000000000

0.30 | 0.2955202066614 | 0.2955202066613 | 5 | 0.0000000000000

0.32 | 0.3145665606162 | 0.3145665606161 | 5 | 0.0000000000001

0.34 | 0.3334870921410 | 0.3334870921408 | 5 | 0.0000000000002

0.36 | 0.3522742332754 | 0.3522742332751 | 5 | 0.0000000000003

0.38 | 0.3709204694136 | 0.3709204694130 | 5 | 0.0000000000006

0.40 | 0.3894183423097 | 0.3894183423087 | 5 | 0.0000000000010

0.42 | 0.4077604530614 | 0.4077604530596 | 5 | 0.0000000000018

0.44 | 0.4259394650660 | 0.4259394650660 | 6 | 0.0000000000000

0.46 | 0.4439481069655 | 0.4439481069655 | 6 | 0.0000000000000

0.48 | 0.4617791755415 | 0.4617791755415 | 6 | 0.0000000000000

0.50 | 0.4794255386042 | 0.4794255386042 | 6 | 0.0000000000000

0.52 | 0.4968801378437 | 0.4968801378437 | 6 | 0.0000000000000

0.54 | 0.5141359916531 | 0.5141359916531 | 6 | 0.0000000000001

0.56 | 0.5311861979208 | 0.5311861979209 | 6 | 0.0000000000001

0.58 | 0.5480239367917 | 0.5480239367919 | 6 | 0.0000000000001

0.60 | 0.5646424733948 | 0.5646424733950 | 6 | 0.0000000000002

0.62 | 0.5810351605370 | 0.5810351605373 | 6 | 0.0000000000003

0.64 | 0.5971954413619 | 0.5971954413624 | 6 | 0.0000000000005

0.66 | 0.6131168519727 | 0.6131168519734 | 6 | 0.0000000000007

0.68 | 0.6287930240174 | 0.6287930240185 | 6 | 0.0000000000011

0.70 | 0.6442176872361 | 0.6442176872377 | 6 | 0.0000000000016

0.72 | 0.6593846719715 | 0.6593846719715 | 7 | 0.0000000000000

0.74 | 0.6742879116282 | 0.6742879116281 | 7 | 0.0000000000000

0.76 | 0.6889214451106 | 0.6889214451106 | 7 | 0.0000000000000

0.78 | 0.7032794192004 | 0.7032794192004 | 7 | 0.0000000000000

0.80 | 0.7173560908995 | 0.7173560908995 | 7 | 0.0000000000000

0.82 | 0.7311458297269 | 0.7311458297269 | 7 | 0.0000000000000

0.84 | 0.7446431199709 | 0.7446431199709 | 7 | 0.0000000000001

0.86 | 0.7578425628954 | 0.7578425628953 | 7 | 0.0000000000001

0.88 | 0.7707388788991 | 0.7707388788990 | 7 | 0.0000000000001

0.90 | 0.7833269096276 | 0.7833269096275 | 7 | 0.0000000000002

0.92 | 0.7956016200366 | 0.7956016200364 | 7 | 0.0000000000002

0.94 | 0.8075581004054 | 0.8075581004051 | 7 | 0.0000000000003

0.96 | 0.8191915683014 | 0.8191915683010 | 7 | 0.0000000000004

0.98 | 0.8304973704925 | 0.8304973704920 | 7 | 0.0000000000006

1.00 | 0.8414709848087 | 0.8414709848079 | 7 | 0.0000000000008

**Вывод**

В работе описано определение машинного эпсилон, приведены его значения ля разных переменных языка Си, описана формула Тейлора и составлен алгоритм реализации вычисления значения функции с заданной точностью для заданного числа точек на отрезке. На основе алгоритма составлена программа на языке Си, проведено её тестирование на различных тестах, составлен протокол исполнения программы.

**Список литературы**

1. Машинный ноль [Электронный ресурс] – URL: <https://ru.wikipedia.org/wiki/Машинный_ноль>
2. Ряд Тейлора [Электронный ресурс] – URL: <https://ru.wikipedia.org/wiki/Ряд_Тейлора>